Naivní TM vs (ZFC): Proč tak složitě?

Opakování (naivní def. mn.)

Množina je každý soubor M určitých rozlišitelných objektů m našeho nazírání nebo myšlení shrnutých v celek.

- (ZFC): 1) axiom existence,
  2) ax. extenzionality ... atd.

Měkký úvod: Centrálním pojmem vyšší mat. je nekonečno.

- Zenón z Eleje (cca 490–430 př. kr.)
  ... aktuální nekonečno | A Ž

  $t = 0$

  $t = 1$

  $t = 3/2$
- Aristotelés (384–322 BC)
  ... potenciální nekonečno

Alt. ∞: až na výjimky odmítána (výjimka: G.W. Leibniz)

Eukleidés: (cca 365–300 BC) vyslovil zásadu „celek > část (vlastní)"
(rigidně dodržováno po 2 tisíce let)

Galilei (1564–1642) $n \longmapsto n^2$ bijekce

$\Rightarrow$ nemá smysl porovnávat ∞.

C.F. Gauss (1777–1855): ∞ je prostředek k vyjadřování.

Zlom: Český mat., logik, teolog, filosof
Bernard Bolzano (1781–1848)

- zavedl myšlenku množiny
- úvahy základy matematiky
- „Paradoxy nekonečna" (vyd. 1851)

Georg Cantor (1845 – 1918)

- vybudoval TM v letech 1873 – 1884
- $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$ ... „různě velká nekonečna"
- $\exists$ transcendentních čísel :
  - algebraická čísla tvoří množinu $\mathcal{A}$, že $\mathcal{A} \approx \mathbb{N}$
  - Ale $\mathbb{R} \succ \mathbb{N}$, takže $\mathbb{R} \succ \mathcal{A} \implies \underbrace{\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}}_{\text{transc. čísla}} \neq \emptyset$. $\boxtimes$

- ryze existenční důkaz
- bylo odmítáno pro „nekonstruktivitu"

R. 1900 II. ICM v Paříži

- D. Hilbert (1862 – 1943) :

23 „Hilbertových" problémů

1) CH ... Hypotéza kontinua :

$$(\forall x)\ \omega \preccurlyeq x \preccurlyeq \mathbb{R} \longrightarrow x \approx \omega \ \vee\ x \approx \mathbb{R}$$

2) Postavit M. na pevné základy, a to tak, že dokážeme konzistenci ax. (PA) nejlépe i úplnost.

Bertrand Russell (1872–1970)

Russellův paradox (publ. 1903)

$y = \{x : x \notin x\}$

„Množina všech množin, kt. nejsou vlastním prvkem."

Q: $y \overset{?}{\in} y$

- nechť ano: $y \in y$. Pak podle definice musí být $y \notin y$ ↯
- nechť ne: Pak $y \notin y$. Tj. y splňuje def. y, takže $y \in y$ ↯.

R. paradox je ve skutečnosti SPOR v naivní TM.

To vedlo k axiomatizaci TM.

V (ZF) y není dobře def. množina.

Věta: V (ZF) neexistuje množina všech množin V.

Důkaz: Kdyby V byla množina, pak $y = \{x \in V : x \notin x\}$ je množina podle axiomu vydělení pro formuli $\varphi(x) : x \notin x$. Tj. y je množina. Ale $y \in y \rightarrow$ ↯ a $y \notin y \rightarrow$ ↯. ↯ ☒

- Paradox holiče: V jistém městě je holič, který musí (podle zákona) holit všechny muže, kteří se neholí sami.

Pokud holič je muž:

- pokud se holí, tak se holí sám, takže se nesmí holit! $\lightning$
- pokud se neholí sám, má holit holič, tj. on sám! $\lightning$

- Richardův / Berryho paradox (paradox „Sta slov"):

Zafixujme slovník spisovné češtiny.

$Z = \{ n \in \mathbb{N} :$ n se dá jednoznačně definovat pomocí nejvýše sta slov z daného slovníku$\}$.

$m = \min(\mathbb{N} \setminus Z)$

Tj. m je nejmenší přirozené číslo které se nedá jednoznačně definovat pomocí nejvýše sta slov z daného slovníku. — jednoznačně definuje m pomocí méně než 100 slov. (konkrétně 17)

Kurt Gödel (1906–1978) narozen v Brně.

Chceme: axiomatický systém splňující:

1) nezávislost axiomů
2) úplnost systému
3) bezespornost (konzistentnost)

1931 K.G. publikoval větu o neúplnosti:

V libovolném konzistentním formálním systému, kde lze vybudovat aritmetiku $\mathbb{N}$, existují pravdivá tvrzení, která nejsou dokazatelná.

x … 5
$\notin$ … 1
$\forall$ … 2
(… 3
) … 4

Zakóduji formuli:

$(\forall x)\ x \notin x \ : \varphi$

$2^3\, 3^2\, 5^5\, 7^4\, 11^5\, 13^1\, 17^5$

Gödelovo číslo formule φ.

[φ: Formule φ není dokazatelná.]

Protože systém je konzistentní, φ je pravdivá, a tím pádem je nedokazatelná.

[kdyby byla nepravdivá, měli bychom ⚡]

2. V. o neúplnosti:

V takových systémech nelze dokázat konsistenci systému.

<u>Speciálně</u>: (ZF) je neúplná a její konsistentnost nejistá.

CH ... Continuum Hypothesis:

je nerozhodnutelná v ZFC:

CH ani ¬CH nemají v ZFC Dk.

CH, ¬CH jsou rel. konz. vzhl. k ZFC

Tj. ZFC je kons. $\Longrightarrow$

$\Rightarrow$ ZFC + CH je kons. $\wedge$

ZFC + ¬CH je kons.

Cohen ... dokázal nezávislost CH

dostal za to Fieldsovu medaili.